СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ФТК, 2-ой семестр

Матрицы и определители.

1. Понятие матрицы. Основные действия с матрицами и их свойства.
2. Пространство квадратных матриц. Обратная матрица и ее свойства.
3. Запись системы линейных алгебраических уравнений в матричной форме. Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы. Пример.
4. Понятие перестановки (подстановки), транспозиции, беспорядка. Четность подстановки.
5. Определение определителя. Пример: вывод формулы для вычисления определителя 3-го порядка непосредственно из определения определителя.
6. Определитель треугольной матрицы.
7. Свойства определителя: определитель транспонированной матрицы, перестановка строк (столбцов).
8. Свойства определителя: сложение определителей, умножение определителя на число.
9. Свойства определителя: линейные преобразования строк (столбцов) определителя.
10. Понятие минора и алгебраического дополнения элемента определителя. Пример.
11. Теорема о разложении определителя по строке (столбцу).
12. Формула для вычисления обратной матрицы. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Пример.
13. Формулы Крамера для решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (n-СЛАУ).
14. Теорема существования и единственности решения n-СЛАУ. Условие существования нетривиального (ненулевого) решения однородной n-СЛАУ.

Линейные векторные пространства (ЛВП)

15. Понятие линейного векторного пространства. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов в ЛВП. Размерность ЛВП. Базис в ЛВП. Координаты вектора в данном базисе. Примеры ЛВП.
16. Связь между координатами вектора в ЛВП в различных базисах.
17. Понятие евклидова пространства. Скалярное произведение векторов и модуль (норма) вектора в евклидовом пространстве. Связь ортогональности и линейной независимости векторов в евклидовом пространстве. Примеры евклидовых пространств.
18. Ортонормированные базисы в евклидовом пространстве. Вычисление скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе. Связь между ортонормированными базисами. Понятие ортогональной матрицы.
19. Процесс ортогонализации Шмидта.
20. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского и неравенство треугольника в евклидовом пространстве.

Линейные операторы в ЛВП.

21. Линейные операторы в ЛВП. Матрица линейного оператора в данном базисе.
22. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.
23. Случай евклидова пространства: задача о нахождении ортонормированного базиса, в котором матрица симметричного оператора будет иметь диагональный вид.

24. Собственные значения и собственные векторы симметричного линейного оператора в евклидовом пространстве. Ортогональность собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
25. Понятие квадратичной формы. Формула $Q(x,x)=(Ax,x)$.
26. Решение задачи о приведении квадратичной формы к диагональному виду.

Дополнение: Элементы аналитической геометрии
(как правило, этот раздел изучается студентами самостоятельно; консультирование и итоговый контроль в форме коллоквиума проводится преподавателями, ведущими практические занятия)
Д1. Векторы в пространстве. Основные действия с векторами и их свойства. Координаты вектора и их связь с основными действиями с векторами. Скалярное и векторное произведение векторов. Их свойства и координатное представление. Проекция вектора на вектор.
Д2. Прямая в пространстве. Векторное, параметрическое и каноническое уравнения прямой.
Д3. Плоскость. Векторное уравнение плоскости. Каноническое уравнение плоскости (в координатах). Геометрический смысл коэффициентов канонического уравнения плоскости.
Д4. Углы между двумя прямыми, двумя плоскостями, прямой и плоскостью.
Д5. Расстояние от точки до плоскости.
Д6. Расстояние от точки до прямой.
Д7. Расстояние между прямыми в пространстве.

Функции нескольких переменных
27. Пространство R^n как евклидово пространство. Канонический ортонормированный базис в R^n. Норма (длина) вектора в R^n. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского и неравенство треугольника в R^n.
28. Понятие окрестности точки (открытого шара) в R^n. Открытые и замкнутые множества в R^n. Точка сгущения множества в R^n. Предел последовательности элементов в R^n и его основные свойства (единственность, покоординатная сходимость, критерий Коши).
29. Понятие отображения R^n в R^m. Координатные функции. Суперпозиция отображений.
30. Предел отображения R^n в R^m. Определение и основные свойства. Частный случай: предел функции нескольких переменных. Связь предела отображения с пределами координатных функций.
31. Непрерывность отображения R^n в R^n. Определение, свойства и связь с непрерывностью координатных функций.
32. Понятие равномерной непрерывности отображения. Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывного отображения на компакте.
33. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции, заданной на линейно-связном подмножестве R^n.
34. Теоремы Вейерштрасса для непрерывной функции, заданной на компакте в R^n.
35. Понятие производной отображения R^n в R^m. Частные производные координатных функций и матрица Якоби производной отображения.

36. Основные свойства производной отображения. Производная суперпозиции отображений.
37. Производная функции нескольких переменных по данному направлению. Градиент функции нескольких переменных. Связь производной по направлению и градиента функции нескольких переменных. «Механический» смысл градиента. Поверхности уровня функции нескольких переменных и геометрический смысл градиента. Нормаль и касательная плоскость к поверхности уровня функции нескольких переменных.
38. Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Дифференциалы высших порядков.
39. Экстремумы функции нескольких переменных. Определения и необходимое условие экстремума.
40. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.
41. Неявные функции. Основные понятия. Условия существования неявной функции.
42. Условный экстремум функции нескольких переменных. Основные понятия.
43. Метод неопределенных коэффициентов (метод Лагранжа) отыскания точек, подозрительных на условный экстремум функции нескольких переменных.

Числовые ряды

44. Определение числового ряда. Частичная сумма и остаток ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Абсолютно сходящиеся ряды. Примеры. Расходимость гармонического ряда.
45. Простейшие арифметические действия со сходящимися числовыми рядами.
46. Положительные ряды. Признаки сравнения для положительных рядов.
47. Признак Коши сходимости положительных рядов.
48. Признак Даламбера сходимости положительных рядов.
49. Интегральный признак сходимости положительных рядов. Пример: исследование сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$.
50. Ряды с членами произвольного знака. Сходимость абсолютно сходящегося ряда.
51. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.

Функциональные последовательности и ряды

52. Понятие функционального ряда и функциональной последовательности. Основные задачи, возникающие в связи с проблемой сходимости функциональных рядов (последовательностей). Примеры.
53. Точечная и равномерная сходимость функционального ряда (последовательности). Область сходимости функционального ряда (последовательности). Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Примеры.
54. Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда.
55. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности функций.
56. Почленное интегрирование равномерно сходящегося функционального ряда.
57. Переход к пределу под знаком определенного интеграла.
58. Почленное дифференцирование функционального ряда.
59. Переход к пределу под знаком производной.

60. Понятие о разложении заданной функции в ряд по ортонормированной системе функций. Ряды Фурье.
61. Понятие о тригонометрических рядах Фурье. Основные теоремы о тригонометрических рядах Фурье.
62. Степенные ряды. Основные понятия. Радиус сходимости степенного ряда и его вычисление. Сумма и произведение степенных рядов.
63. Основные свойства степенных рядов (равномерная сходимость, непрерывность суммы степенного ряда, почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда).
64. Степенные ряды в комплексной плоскости.
65. Понятие о рядах Тейлора бесконечно дифференцируемой функции. Аналитические функции вещественной переменной. Достаточные условия разложимости функции в ряд Тейлора. Ряды Тейлора основных элементарных функций.

Обыкновенные дифференциальные уравнения.
66. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Порядок дифференциального уравнения. Понятия решения дифференциального уравнения, интеграла дифференциального уравнения, общего решения и общего интеграла дифференциального уравнения.
67. Постановка начальной задачи (задачи Коши) для ОДУ первого порядка. Геометрический смысл задачи Коши. Понятие корректности решения задачи Коши.
68. Формулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$.
69. Однородное ОДУ первого порядка. Метод решения.
70. ОДУ в полных дифференциалах. Метод решения. Понятие интегрирующего множителя.
71. ОДУ с разделяющимися переменными. Метод решения.
72. Линейное ОДУ первого порядка. Метод решения.
73. Постановка задачи Коши для ОДУ n-го порядка.
74. Случаи, допускающие понижение порядка ОДУ.
75. Линейные ОДУ (ЛОДУ) n-го порядка. Основные понятия. Основные свойства решений (ЛОДУ) n-го порядка (однородного и неоднородного).
76. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций. Необходимое условие линейной зависимости системы функций. Определитель Вронского.
77. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения (ЛООДУ) n-го порядка.
78. Структура общего решения линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка.
79. Понятие фундаментальной системы решений линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения (ЛООДУ) n-го порядка.
80. Структура общего решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (ЛНОДУ) n-го порядка.
81. Линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера решения этого уравнения.
82. Интегрирование линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка методом вариации постоянных (метод Лагранжа).

75. Понятие о методе решения задачи Коши для ЛНОДУ с переменными коэффициентами с помощью степенных рядов на примере уравнения 2-го порядка.