

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ФТК, 1-й семестр

Введение

1. Множества и действия над ними. Теоретико-множественная и логическая символика.
2. Понятие отображения. Области определения и значения отображения. Отображения «в» и отображения «на». Примеры отображений.
3. Взаимно однозначные отображения. Необходимое и достаточное условие взаимной однозначности отображения. Понятие обратного отображения. Необходимое и достаточное условие существования обратного отображения. Примеры.
4. Сравнение бесконечных множеств. Понятие мощности множества. Множества счетные и множества мощности континуум. Свойства счетных множеств. Счетность множества рациональных чисел и несчетность множества иррациональных чисел.
5. Действительные (вещественные) числа. Основные свойства множества действительных чисел. Лемма о вложенных промежутках.
6. Границы числовых множеств. Точные верхняя и нижняя границы числового множества. Определения. Примеры. Свойства точных границ.
7. Теорема о существовании точных границ у ограниченного числового множества.

Предел последовательности

8. Понятие последовательности и ее предела. Определения, примеры. Ограниченность сходящейся последовательности.
9. Единственность предела. Переход к пределу в неравенстве.
10. Принцип «двух милиционеров». Предел подпоследовательности сходящейся последовательности.
11. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Их взаимосвязь и основные свойства. Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Применение понятия эквивалентности б.м. и б.б. для раскрытия неопределенностей. Примеры.
12. Арифметические действия со сходящимися последовательностями.
13. Принцип Больцано-Вейерштрасса (принцип выбора). Понятия верхнего и нижнего пределов последовательности.
14. Сходящиеся «в себе» (фундаментальные) последовательности. Их свойства. Критерий Коши сходимости последовательности.
15. Сходимость монотонной ограниченной последовательности.
16. Число e .

17. Пределы: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}$, $a > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n n^k, 0 < a < 1$$

18. Пределы: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

Предел функции

19. Точка сгущения для множества на вещественной прямой. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная точка была точкой сгущения для данного множества.
20. Определения предела функции по Коши и по Гейне. Эквивалентность этих определений.
21. Односторонние пределы. Их определение и свойства. Понятие предела функции на бесконечности. Бесконечные пределы.
22. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин. Главная часть бесконечно большой (бесконечно малой) величины. Таблица эквивалентных бесконечно малых величин. Примеры.
23. Основные теоремы о пределе функции. Критерий Коши.
24. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ (с выводом). Другие «замечательные пределы».
25. Пределы монотонных функций.

Непрерывность функции

26. Понятие непрерывности. Основные определения. Разрывы функции. Классификация разрывов. Примеры. Разрывы функции, монотонной на промежутке.
27. Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на замкнутом промежутке.
28. Теорема Вейерштрасса о максимуме и минимуме функции, непрерывной на замкнутом промежутке.
29. Теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.
30. Теорема о множестве значений функции, непрерывной на замкнутом промежутке.
31. Теорема о непрерывности монотонной функции, область значений которой есть промежуток.
32. Обратная функция. Критерий существования обратной функции. Свойства функции, обратной к непрерывной функции.

Комплексные числа

33. Понятие комплексного числа. Сложение и умножение комплексных чисел. Модуль комплексного числа. Сопряженное комплексное число.
34. Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическая интерпретация сложения комплексных чисел.
35. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра. Геометрическая интерпретация произведения комплексных чисел.
36. Извлечение корня n -й степени из комплексного числа. $\sqrt[n]{1}$.
37. Предел последовательности комплексных чисел. Его свойства.
38. Функция e^z . Свойства функции $e^{i\varphi}$. Связь с тригонометрическими функциями. Формулы Эйлера.
39. Многочлены в комплексной плоскости. Разложение на множители.
40. Рациональные дроби. Разложение рациональной дроби на простейшие слагаемые.

Производная

41. Задачи, приводящие к понятию производной.
42. Определение производной. Эквивалентные формы определения производной. Примеры непосредственного вычисления производной.
43. Дифференцируемые функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Простейшие правила дифференцирования.
44. Производная сложной функции.
45. Производная обратной функции. Примеры.
46. Формулы дифференцирования основных элементарных функций.
47. Дифференциал и его геометрический смысл.
48. Производные высших порядков.
49. Теоремы Ферма и Ролля.
50. Теоремы Лагранжа и Коши.
51. Правило Лопиталя.
52. Формула Тейлора. Представления остаточного члена в формуле Тейлора.
53. Формулы Тейлора для e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$.
54. Связь монотонности функции и ее производной.
55. Исследование функции на экстремумы с помощью производной.
56. Точки перегиба функции и их нахождение с помощью производной второго порядка.

Первообразная (неопределенный интеграл)

57. Понятие первообразной и ее основные свойства.
58. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Пример.
59. Замена переменной в неопределенном интеграле. Пример.

Определенный интеграл.

60. Задача о площади подграфика функции.
61. Определение интеграла по Риману.
62. Геометрический смысл определенного интеграла.
63. Основные свойства интеграла: линейность.
64. Основные свойства интеграла: аддитивность.
65. Основные свойства интеграла, выражаемые неравенствами.
66. Теорема о среднем для определенного интеграла.
67. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу.
68. Формула Ньютона-Лейбница.
69. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Пример.
70. Замена переменной в определенном интеграле. Пример.
71. Понятие несобственного интеграла. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода. Понятие сходимости несобственных интегралов. Критерий сходимости. Абсолютная сходимость. Сходимость интегралов: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$; $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.
72. Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций (признаки сравнения).

Приложения определенного интеграла.

73. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах. Пример.

74. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах. Пример.

75. Вычисление объемов. Общая формула.

76. Объем тела вращения. Примеры.

77. Кривая в пространстве. Жорданова кривая. Гладкая кривая. Основные понятия и определения.

78. Понятие длины кривой.

79. Вычисление длины гладкой кривой с помощью определенного интеграла. Пример.

80. Площадь поверхности вращения.