Программа курса «Методы математической физики» (6-й и 7-й семестры)

Цель изучения дисциплины – получение студентами знаний, умений и, частично, навыков постановки, анализа, аналитического и численного решения основных классических задач математической физики, имеющих приложения в технических вопросах.

Основными **задачами** при изучении дисциплины являются:

1. Изучение принципов построения математических моделей различных процессов и систем (физических, биологических, экономических и т.п.);
2. Ознакомление с математическими моделями классической математической физики и вариантами постановок для них корректных задач;
3. Приобретение студентами знаний об основных подходах к построению и анализу аналитических и численных решений задач математической физики;
4. Приобретение студентами знаний, умений и практических навыков использования классических аналитических методов решения задач математической физики, в частности, навыков использования основных специальных функций;
5. Приобретение студентами знаний, умений и практических навыков использования численных методов решения задач математической физики;
6. Приобретение студентами знаний основных методов асимптотического анализа и уметь их применять к решению задач математической физики.

1. Разделы курса

1.1. Постановка задач математической физики

Математическая физика как наука о математических моделях физических процессов и методах анализа этих моделей. Простейшие уравнения математической физики (уравнения теплопроводности, волновое уравнение, уравнение Лапласа). Специфика постановки задач для уравнений математической физики.

1.2. Уравнения в частных производных первого порядка

Общие понятия. Задача Коши. Линейные однородные уравнения первого порядка. Квазилинейные уравнения первого порядка. Геометрическая интерпретация.

1.3. Классификация уравнений в частных производных второго порядка

Понятие об общем решении уравнения в частных производных**.** Классификация уравнений в частных производных второго порядка.

1.4. Уравнения гиперболического типа

Свободные колебания струны, с закрепленными концами. Продольные колебания стержня. Метод бегущих волн. Решение Даламбера. Решение задачи Коши для неограниченной струны. Корректность постановки задачи. Пример Адамара некорректно поставленной задачи. Метод Фурье. Свободные колебания однородной струны, закрепленной на концах. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах. Вынужденные колебания струны с подвижными концами. Общая схема метода Фурье. Единственность решения смешанной задачи. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны.

1.5. Уравнения параболического типа

Вывод уравнения теплопроводности для стержня. Распространения тепла в конечном стержне. Интегрирование уравнения распространения тепла в ограниченном стержне методом Фурье. Охлаждение бесконечного стержня. Распространение тепла в кольце.

1.6. Уравнения эллиптического типа

Определения. Постановка задач. Фундаментальное решение уравнений Лапласа. Формулы Грина. Основная интегральная формула Грина. Свойства гармонических функций. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Метод функции Грина. Решение задачи Дирихле для шара методом функции Грина.

1.7. Специальные функции математической физики

Эйлеровы интегралы. Интеграл вероятности. Функции Бесселя. Функция Вебера. Представление функции Вебера в виде ряда. Рекуррентные формулы для функций Бесселя. Интегральные представления для цилиндрических функций. Примеры использования интегрального представления Пуассона. Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента. Модифицированные цилиндрические функции. Задача Штурма-Лиувилля, связанная с цилиндрическими функциями. Разложение функции в ряды Фурье-Бесселя и Дини. Приложения цилиндрических функций в математической физике. Решение задачи Дирихле для цилиндра. Сферические функции. Полиномы Лежандра. Производящая функция для полиномов Лежандра. Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра. Задача Штурма-Лиувилля, связанная с полиномами Лежандра. Вычисление нормы для полиномов Лежандра. Приложения полиномов Лежандра в математической физике.

1.8. Интегральные уравнения математической физики

Понятие интегрального уравнения и его решения. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Уравнения Вольтерра. Альтернатива Фредгольма.

1.9. Асимптотические методы математической физики

Определение асимптотического ряда. Свойства асимптотических разложений. Равномерные и неравномерные асимптотические разложения. Пример расходящегося асимптотического ряда. Определение и основные свойства асимптотических разложений. Метод Лапласа асимптотической оценки интеграла. Метод стационарной фазы. Метод перевала.

1.10. Численное решение уравнений математической физики

Понятие о методе конечных разностей. Основные определения и конечно-разностные схемы. Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач. Постановка конечно-разностных задач для уравнений в частных производных. Применение метода конечных разностей к решению уравнений параболического типа. Метод конечных разностей для решения уравнений гиперболического типа. Метод конечных разностей для решения уравнений эллиптического типа. Численное решение интегральных уравнений.

1.11. Элементы вариационного исчисления

Функционалы. Простейшие задачи вариационного исчисления. Вариация функционала. Необходимые условия экстремума. Задача с закрепленными концами. Уравнение Эйлера. Задача со свободными концами. Обобщения на случай нескольких функций и нескольких независимых переменных. Достаточные условия экстремума.

1.12. Математические модели механики сплошных сред

Понятие физически бесконечно малого объема и схема сплошной среды (СС). Некоторые основные величины, связанные с описанием СС. Два подхода к описанию кинематики СС. Скорость и ускорение частицы СС в переменных Лагранжа и Эйлера. Линии тока, траектории, критические точки. Тензор скоростей деформаций. Формула дифференцирования объемного интеграла с переменной областью интегрирования. Закон сохранения массы в интегральной форме. Уравнение неразрывности. Закон количества движения для СС в интегральной форме. Тензор напряжений. Уравнения движения сплошной среды в дифференциальной форме. Закон сохранения энергии для СС в интегральной форме. Вектор потока тепла. Дифференциальная форма закона сохранения энергии. Простейшие модели СС (идеальная и вязкая жидкость, упругая СС, сжимаемые и несжимаемые СС, учет теплопроводности). Постановка начальных и краевых задач для различных математических моделей СС.

2. Перечень тем практических занятий

- раздел 2. Уравнения в частных производных первого порядка.
- раздел 4. Уравнения гиперболического типа.
- раздел 5. Уравнения параболического типа.
- раздел 6. Уравнения эллиптического типа.
- раздел 7. Специальные функции математической физики.
- раздел 9. Асимптотические методы математической физики.
- раздел 11. Элементы вариационного исчисления.
- раздел 12. Математические модели механики сплошных сред

3. Перечень тем расчетно-графических работ

- раздел 4. Уравнения гиперболического типа.
- раздел 5. Уравнения параболического типа.
- раздел 6. Уравнения эллиптического типа.
- раздел 9. Асимптотические методы математической физики.
- раздел 10. Численные методы математической физики
- раздел 11. Элементы вариационного исчисления.

4. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999
2. Куликов К.Г., Фирсов А.Н. Уравнения и методы математической физики. Классические модели: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010 (в печати) <URL:http://www.unilib.neva.ru/dl/1770.pdf>
4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике: Учеб. пособие.- М.: Изд-во МГУ, 2000.

5. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. - М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
6. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005
7. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. - М.: Эдиториал УРСС, 2002
8. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики.- М.: «Интеллект», 2007
9. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. – СПб.: Изд-во СПб. ун-та., 2005

Дополнительная литература

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М., «Высшая школа», 1970.
2. Треногин В.А. Методы математической физики. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. Годунов С.К. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1979
4. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А. и др. Задачи по математическим методам физики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.
5. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М.: Физматлит., 1961
6. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1971
7. Федорюк М.В. Метод перевала. – М.: Наука, 1977